الفصل الثاني

التحويلات الخطية

مقدمة:

تظهر الدوال تقريباً في كل مجالات الحياة.سندرس في هذا الفصل خواص دوال معينة تدعى التحويلات الخطية.تؤدي التحويلات الخطية دوراً مهماً في مجالات عديدة من الرياضيات ، أضافة الى دورها في عدد هائل من المشاكل التطبيقية في علوم الاجتماع والاقتصاد.

1.2.التحويلات الخطية:

تعريف (1.1.2) :

ليكن كل من V و W فضاء متجهات ، التحويل خطي L من V الى W هو دالة تنسب لكل متجه x في V متجهاً وحيداً $L(x)$ في W.

بحيث أن

1) $\mathrm{L}\,(\mathrm{x}+y)=\mathrm{L}\,(\mathrm{x})+\mathrm{L}(\mathrm{y})$

2) لكل x في V ولكل عدد c فأن $L(c\,x)=c\,L(x)$

سوف نكتب الحقيقة القائلة بأن L تنقل V الى W حتى وان لم تكن L تحويلاً خطياً بالصيغة $L\colon V\to W$ اذا كانت $W=V$ فيقال للتحويل الخطي $L\colon V\to V$ بأنه مؤثر خطي على V.

مثال (1) : ليكن $L:\ R^3\ \to\ R^2$ معرفاً بالصيغة $L\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ نتحقق من كون L تحويلاً خطياً . نفرض أن $x=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}$, $y=\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{bmatrix}$

$L\,(x+y)=L$

$=$

كذلك اذا كان c عدداً فأن

$L(c\,x)=L$

وعليه يكون L تحويلاً خطياً.

مثال (2) : التحويل $L\colon R^2\to R^2$ المعرف بالعلاقة $L(x,y)=(2x,3y)$ هو تحويل خطي، ذلك لأنه اذا اخذنا متجهي $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ في R^2 فيكون لدينا

$L((x_1\,,\,y_1)+($

$=$

$=$

$=$

كذلك اذا كان c عدداً فأن

$L(c\,(x,y)) = L$

اي ان L تحويل خطي.

<u>مثال (3):</u> لتكن $L: R^3 \to R^3$ معرفة بالصيغة

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + \\ 2y \\ z \end{bmatrix}$$

ولتحديد فيما اذا كانت L تحويلاً خطياً نفرض أن

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, y =$$

فأن

$$L(x+y) = L\Big($$

ومن الناحية الاخرى يكون ،

$$L(x) + L(y) =$$

نلاحظ أن $L(x+y) \neq L(x) + L(y)$ نستنتج بأن الدالة L هي ليست تحويلاً خطياً.

<u>مثال (4):</u> ليكن $L: R^3 \to R^3$ تحويلاً معرفاً بالعلاقة

لكي نختبر بأن L تحويل خطي نجد انه لكل

$v_1 = (x_1, y_1, z_1)\, , v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ في R^3.

$$L\,(v_1 + v_2) = L$$

$$= (x_1 + x_2 + 2$$

ولكن

$$L(v_1) + L(v_2) =$$
$$= ($$

لذا فأن

وبهذا فأن L ليس تحويلاً خطياً.

مبرهنة (1.2) :

ليكن $L: V \to W$ تحويلاً خطياً ، فأن

1) $L(0_v) = 0_W$ حيث أن 0_v و 0_W هما المتجهات الصفريان للفضائيين V و W على التوالي.

2) $u, v \in V \; , L\,(u - v) = L(u) - L(v)$

البرهان : لبرهان (1)

لدينا $0_v = 0_v + 0_v$ وعليه فأن

$$L(0_v) = L(0_v +$$

وبطرح $L(0_v)$ من طرفي (1) نحصل على ان

$$L(0_v) = 0_W$$

لبرهان (2)

$$L(u + (-v)) =$$

ولأن L تحويل خطي فأن

$$= L(u) + L\big((-$$

$$= L(u) - L(v)$$

2.2. النواة والمدى للتحويل الخطي:

تعريف (1.2.2):

يقال للتحويل خطي $L: V \rightarrow W$ بأنه متباين اذا كان $x_1 \neq x_2$ فأن $L(x_1) \neq L(x_2)$
وبعبارة مكافئة يمكن ان نقول بأنه L متباين اذا كان$L(x_1) = L(x_2)$ فأن $x_1 = x_2$ اي انL
تحويل خطي متباين اذا كان $L(x_1)$ و$L(x_2)$مختلفين عندما يكون x_1 و x_2 مختلفين.

مثال (5):

ليكن $L: R^2 \rightarrow R^2$ معرفاً بالصيغة

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + \\ x - \end{bmatrix}$$

لتحديد فيما أذا كان L متبايناً.

نفرض أن

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

والآن اذا كان

بجمع هاتين المعادلتين نحصل

وبالتعويض بأحد المعادلتين ينتج ان

$$y_1 = y_2$$

وعليه فأن $x_1 = x_2$ وان L تحويل متباين.

تعريف(2.2 .2):

ليكن $L: V \to W$ تحويلاً خطياً.ان نواة L (يرمز له $KerL$)، هي المجموعة الجزئية من Vالمكونة من جميع المتجهات x بحيث ان $L(x) = 0_W$ يعني ذلك ان

مثال (6):

اذا كان $L: R^2 \to R^2$ معرفاً بالصيغة

$$L = \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$$

فأن $KerL$ هي مجموعة جميع المتجهات x في R^2 بحيث أن $\mathrm{L(x)} = 0$ اي ان

$\begin{bmatrix} x + y \\ x - y \end{bmatrix} = 0$ اي علينا ان نحل النظام الخطي

لايجاد قيم x و y الحل الوحيد هو ان يكون $x = 0$ وهذا يعني بأن $KerL = \{0\}$

ملاحظة : حسب المبرهنة (1.2) فأن $KerL$ لايكون مجموعة فارغة لان اذا كان $L: V \to W$ تحويل خطي فأن $KerL \ni 0_v$ والسبب $L(0_v) = 0_W$.

مثال (7):

ليكن$L : R^3 \to R^3$ بحيث ان $L(x, y, z) = (x, y, 0)$ سنبرهن أن هذا تحويل خطي.نأخذ المتجهين $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ فيR^3 .

تحقق

$$L\big((x_1, y_1, z_1) +$$
$$= ($$
$$= L$$

يوجد c عدداً فأن

$L(c(x,y,z)) =$

ولتحديد نواة (KerL) L علينا البحث عن جميع المتجهات (x, y, z) بحيث أن

وهذا يعني ان

$(x,y,0) = (0,0,$

ومنها يكون $x = 0$, $y = 0$ لهذا فأن كل عناصر بالشكل$(0,0,z)$ سيتحول بتأثير L الى (0,0 0) ومنها تكون نواة L العناصر جميعها من الصيغة $(0,0,z)$.

مبرهنة (2.2) :

اذا كان $L: V \to W$ تحويلاً خطي فأن KerL فضاء جزئي من V.

البرهان .

ليكن كل من x , y $\ni$ $kerL$ بما أن L تحويلاً خطي فأن

$L(x+y) = L(x$

وعليه فأن $x + y$ موجودة في KerL. كذلك اذا كان c عدداً ولكون L تحويلاً خطياً، فأن$L(c\,x) = c\,L(x) = c\,0_W = 0_W$ وعليه فأن $kerL \ni c\,x$ اي أن $KerL$ فضاء جزئي من V .

تعريف (3.2. 2):

اذا كان $L : V \to W$ تحويلاً خطياً،فأن مدى L ، ويرمز له بالرمز$rangL$ هو مجموعة جميع متجهات W التي تكون صوراً،بتأثير L ،المتجهات في V.

وعليه يكون المتجه y في $rangL$ اذا استطعنا ان نجد متجه x في V بحيث أن $L(x) = y$ اي ان

$rangL = \{w \in$

واذا كان

$rangL = W$

فيقال بأن L تحويل خطي شامل.

مثال(8):

ليكن $L: R^3 \to R^2$ تحويل خطي معرفاً بالصيغة

لمعرفة فيما أذاكان L شاملاً ، نختار متجهاً ما $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ في R^2 واحاول ايجاد متجه $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ في R^3 .

بحيث أن

$$L(x) = y$$

وبما أن $L(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ نجد أنه اذا كان $x_1 = y_1$ و $x_2 = y_2$

فأن

$$L(x) = y$$

وعليه فأن L شامل اي أن $rangL = R^2$ وعليه بعد المدى للتحويل الخطيLهو 2.

مبرهنة (3.2) :

اذا كان $L : V \to W$ تحويلاً خطياً ، فأن

$$\dim(KerL) + \text{d}$$

مثال (9):

لتكن $L: R^3 \to R^3$ تحويل خطي معرفاً بالصيغة

$$L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

نجد النواة kerL وبعد النواة $(\dim \text{kerL})$ واساس المدى $(rangL\ )$ وبعد المدى$(\dim rangL)$.

لايجاد $kerL$ بحيث يجب ان نجد كل من V في R^3 . بحيث $L(v) = 0$

$$\begin{bmatrix} u_1 + u_3 \\ u_1 + u_2 \\ u_2 - u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$u_1 \quad + \quad u_3 = 0$

$u_1 + u_2 = 0$

$u_2 - u_3 = 0$

بأستخدام صيغة النسق الصفي المختزل (reduced row echelon form) لحل هذا النظام.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} -$$

$$-r_2 + r_3 \to r_3$$

$\therefore u_1 = -u_3$

$u_2 = u_3$

$u_3 \ is \ free$

$let \ u_3 = a$

$$\therefore \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ a \\ a \end{bmatrix}$$

$$\therefore KerL = \{ \begin{bmatrix} -a \\ a \\ a \end{bmatrix}$$

لايجاد اساس للـ $\mathrm{ker}L$

لكل $V \ni kerL$ هو من الصيغة

$$V = \begin{bmatrix} -a \\ a \\ a \end{bmatrix} = a$$

لذلك $\dim KerL = 1$ وحسب المبرهنة (3.2)

$\dim (kerL) + d$

$1 + \dim(rangL$

$\therefore \dim(rangL)$

تعريف (4.2.2) :

ليكن $L: V \to W$ تحويلاً خطياً يسمى بعد مدى L رتبة ويرمزلها (Rank) وبعد نواة L صفرية L ويرمز لها (Nullityl).

مبرهنة (4.2):

اذا كان $L: V \to W$ تحويلاً خطياً ، فأن rangL هو فضاء جزئي من W.

البرهان

ليكن y_1 ، y_2 في $rangL$ فأن

$y_1 = L(x_1)$,

لبعض قيم x_1 و x_2 في V .

الان

$y_1 + y_2 = L(x_1$

وهذا يعني ان $y_1 + y_2$ في $rangL$

كذلك اذا كان c عدداً،

فأن

$c\, y = c\, L(x_1) =$

اي ان c y في $rangL$

$\therefore$ $rangL$ هو فضاء جزئي من W.

مبرهنة (5.2) :

يكون التحويل الخطي $L: V \rightarrow W$ متبايناً اذا وفقط اذا كانت $KerL = \{0_v\}$

البرهان

نفرض ان L متباين ، وليكن x متجهاً في $KerL$ فأن $L(x) = 0_w$ وكذلك نعرف ان $L(0_v) = 0_w$ وعليه يكون $L(x) = L(0_v)$ لان L تحويل متباين ، فعليه يكون $x = 0_v$

$KerL = \{0_v \}$

وبالعكس

لنفرض ان
$KerL = \{0_v \}$ ونريد ان نبين ان L تحويل متباين . ليكن $L(x_1) = L(x_2)$ حيث أن x_1 و x_2 في V فأن

اي ان

$\therefore x_1 = x_2$

وعليه L تحويل متباين.

3.2. مصفوفة التحويل الخطى :

اذا كانت A مصفوفة من الصنف $m \times n$ نستطيع ان نعرف تحويل خطي $L: R^{n} \to R^{m}$ بالصيغة $L(x) = A\,x$ لكل x في R^{n}.

الان ليكن $L: V \to W$ تحويلاً خطياً من فضاء المتجهات المنتهي البعد V الى فضاء المتجهات المنتهي البعد W في هذه الفقرة سنبين كيف نقرن مصفوفة وحيدة مع L.تمكننا من ايجاد $L(x)$ لكل x في V ، بواسطة الضرب المصفوفي لوحده.

مثال (10): نفرض ان $L: R^{2} \to R^{3}$تحويل خطي معرف بالصيغة

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + \\ x - \\ 2x + \end{bmatrix}$$

وعليه يكون

$$L(x) = L\left(x\right.$$

$$=$$

وعليه فأن التحويل الخطي L قد عبر عنه بالصيغة

$$L(x) = Ax$$

حيث ان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

في هذا المثال حصلنا على A على فرض ان متجهات R^{2} و R^{3}تمثل دائماً بدلالة الاساسات الطبيعية وسوف نتحدث عن اي اساس كان الى R^{n}و R^{m}وكذلك سنتعامل مع فضاءات متجهات V و W سنناقش اولاً مفهوم المتجه الاحداثي.

4.2. المتجهات الاحداثية:

تعريف (1.4.2) :

لكل V فضاء متجهات بعد n وله اساس

$$S = \{x_1, x_2, \dots , x$$

اذا كان

$$x = a_1x_1 + a_2x$$

متجهاً ما في V ، فأن المتجه

$$[x]_s = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{bmatrix}$$

في R^n يدعى بمتجه احداثي الى x نسبة للاساس S تدعى مركبات $[x]_S$ بأحداثيات x نسبة الى S.

نلاحظ ان المتجه الاحداثي $[x]_S$ يعتمد على الترتيب الذي تظهر فيه متجهات S. ان تغير الترتيب يمكن ان يغير احداثيات x نسبة الى S.

مثال (11) :

ليكن $S = \{x_1, x_2, x_3\}$ اساسا الى R^3.

حيث أن

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 =$$

اذا كان $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ فلأيجاد $[x]_S$ يجب علينا الحصول على c_1, c_2, c_3 وبحيث أن

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = c_1x_1 + c_2$$

وبالتعويض بدل x_3, x_2, x_1 نحصل على

$$\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} +$$

والذي يؤدي الى النظام الخطي الاتي:

نحل هذا النظام بطريقة النسق الصفي المختزل(reduced row echelon form)

$$r_1 + r_2 \to r_2 \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$-r_2 + r_3 \to r_3$$

$$-r_3 + r_1 \to r_1$$

$$c_1 = 2\,, c_2 = 3\,,$$

وعليه يكون

$$[x]_s = \begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}$$

<u>مثال(12) :</u>

ليكن فضاء المتجهات p_1 المكونة من جميع متعددات الحدود التي درجتها اقل او تساوي واحد مع متعددة الحدود الصفرية.

لتكن $S = \{t, 1\}$ اساس الى p_1 اذا كان $P(t) = 5t - 2$ فأن $[p(t)]_s = \begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}$ من ناحية أخرى ، اذا كان $T = \{t+1, t-1\}$ اساسا الى p_1 سوف نجد احداثيات $p(t)$ بالنسبة للاساس T .

$5t - 2 = c_1(t +$

$c_1 + c_2 = 5$

$c_1 - c_2 = -2 \qquad ...(2)$

بجمع المعادلتين نحصل

$2c_1 = 3 \Rightarrow c_1 =$

نعوض قيمة c_1 بالمعادلة رقم (1) نحصل

$\left(\frac{3}{2}\right) + c_2 = 5 \Rightarrow$

$c_1 = \frac{3}{2}\,, c_2 = \frac{7}{2}$

والتي تؤدي الى

$$[p(t)]_T = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

نلاحظ في هذا المثال ان احداثيات المتجه تتغير بتغير الاساس.

مبرهنة (6.2) :

ليكن $L: V \to W$ تحويلاً خطياً من فضاء المتجهات V ذي البعد n الى فضاء المتجهات W ذي البعد $(0 \neq m\,, 0 \neq n)$ وليكن

$S = \{x_1, x_2, \dots ,$

$T = \{y_1, y_2, \dots ,$

اساسين للفضائيين V و W على التوالي فأن المصفوفةA من الصنف$m \times n$التي عمودها رقم j هو المتجه الاحداثي $[L(x_i)]_T$ للمتجه $L(x_i)$ نسبة الى Tهي مصفوفة المقترنة مع L ولها الخاصية التالية :

اذا كان $L(x) = y$ لبعض قيم x في V فأن

$[y]_T = A\ [x]_s$

حيث أن $[x]_S, [y]_T$وهما متجها الاحداثيات للمتجهين x و y نسبة الى اساسين S و T على التوالي.اضافة لذلك ، فأن A هي المصفوفة الوحيدة التي لها هذه الخاصية.

تعريف(2.4.2) :

يقال لمصفوفةA من الصنف$m \times n$ في المبرهنة (6.2) بأنها مصفوفة L نسبة للاساسين S و T. تدعى المعادلة $[y]_T = A[x]_S$ بتمثيل L نسبة الى S و T كذلك نقول بأنه المعادلة $[y]_T = A[x]_S$ يمثل L نسبة الى S و T.

يلاحظ ان وجودA يساعدنا على احلال A محل L و $[x]_S$ محل x و $[y]_T$ محل y في العلاقة $L(x) = y$ للحصول على$A[x]_S = [y]_T$ وعليه نستطيع ان نتعامل بالمصفوفات بدلا عن التحويلات الخطية .الفيزيائيون والآخرون الذين يتعاملون كثيرا مع التحويلات الخطية ينجزون معظم حساباتهم بمصفوفات التحويلات الخطية.

مثال (13) :

ليكن $L: R^3 \rightarrow R^2$ معرفاً بالصيغة

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ليكن

$$T = \{ y_1 , y_2 \}$$

الاساسين الطبيعين الى R^2 و R^3 على التوالي

الان

$$L(x_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$[L(x_1)]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وأن

$$L(x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ولذلك يكون

$[L(x_2\,)]_T\; = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

$L(x_3) = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}$

مثال (14) :

ليكن $L: R^3 \rightarrow R^2$ معرفا كما في المثال السابق.الان نفرض ان

$S = \{\, x_1\,, x_2\,, x_3$

$x_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, x_2 =$

$y_1 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\quad ,$

$L(x_1) = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_1 + c_2\\2c_1 + 3\end{bmatrix}$

$c_1 + c_2 = 2$

$2c_1 + 3c_2 = 3$

بحل المعادلتين نحصل على

$c_1 = 3\quad ,$

$\therefore\ [L(x_1)]_T =$

$L(x_2) = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$

$c_1 + c_2 = 2$

$2c_1 + 3c_2 = 5$

بحل المعادلتين نحصل على

$\therefore [L(x_2)]_T = [$

$L(x_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$c_1 + c_2 = 1$

$2c_1 + 3c_2 = 3$

بحل المعادلتين نحصل على

$c_1 = 0 \quad ,$

$\therefore [L(x_3)]_T = [$

وعليه فأن المصفوفة A الى L هي

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

ملاحظة : تختلف هذه المصفوفة اختلافاً كبيراً عن المصفوفة التي عرفL بواسطتها ، وعليه حتى لو كانت هناك مصفوفة A وقد استعنا بها في تعريف تحويل خطي L فلانستطيع ان نستنتج بأنها من الضروري ان تكون المصفوفة الممثلة الى L نسبة للاساسينS و T.